3.4.1 Herleitung von Kosten

Eine Kostenfunktion ist immer von der Gestalt $K = K(x)$, d.h. sie ist abhängig vom Output x. Kosten in Abhängigkeit vom Input $K(v_1,v_2)$ sind also keine Kostenfunktion!

Man leitet die Kostenfunktion nach unterschiedlichen Methoden her, je nachdem, ob

- ein Faktor konstant ist
  - ◇ kurzfristige Kostenfunktion berechnen oder
- ob beide variabel sind
  - ◇ langfristige Kostenfunktion berechnen.

3.4.1.1 Kurzfristige Kostenfunktion

Einer der Faktoren ist gegeben und konstant. Hierdurch entstehen Fixkosten, das Ergebnis ist also

$K(x) = k_v \cdot x + K_f$	kurzfristige Kostenfunktion.

Wie kommen wir nun dorthin?

LAMBERT-KOCHREZEPT KURZFRISTIGE KOSTENFUNKTION:

1. Gehe aus von den Kosten in Abhängigkeit vom Input, also $K(v_1,v_2) = q_1 \cdot v_1 + q_2 \cdot v_2$.
2. Setze den konstanten Faktor hier ein.
3. Wir benötigen den Zusammenhang zwischen dem übrig gebliebenen – variablen – Faktor und dem Output x. Gehe hierzu in die Produktionsfunktion.
4. Setze den konstanten Faktor ein.
5. Löse nach dem verbliebenen Faktor auf. Man erhält die sog. **Faktoreinsatzfunktion $v_i = v_i(x)$**.
6. Setze dies in das Ergebnis aus Schritt 2 ein.

Rechnen wir dies durch.

Beispiel 22:

Peters Produktionsfirma besitzt die Produktionsfunktion $x = v_1^{0,5}v_2^{0,5}$. Der Faktor x_2 ist (kurzfristig) konstant mit $v_2 = 9$. Die Faktorpreise sind 4 und 5 für die beiden Güter 1 und 2. Berechne die Kostenfunktion.

Wir gehen aus von

$$
\begin{aligned}
K(v_1,v_2) &= q_1 \cdot v_1 + q_2 \cdot v_2 \\
&= 4 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2 \\
&= 4 \cdot v_1 + 5 \cdot 9 \\
&= 4 \cdot v_1 + 45.
\end{aligned}
$$

Wenn man in die Produktionsfunktion die konstante Menge für v_2 einsetzt, so erhält man $x = v_1^{0,5}v_2^{0,5}.= v_1^{0,5}9^{0,5}.= 3 \cdot v_1^{0,5}$. Dies löst man nach dem verbliebenen Faktor, also v_1, auf und erhält $v_1 = (1/9) \cdot x^2$. Diese Faktoreinsatzfunktion für das Gut 1 setzt man in die obige Rechnung für die Kostenfunktion ein und erhält schließlich

$K(v_1,v_2) = 4 \cdot v_1 + 45 = 4 \cdot (1/9) \cdot x^2 + 45 = (4/9) \cdot x^2 + 45 = K(x).$

Die (kurzfristige) Kostenfunktion ist daher $K(x) = (4/9) \cdot x^2 + 45$.

LAMBERT-REGEL:

Aus den Kosten in Abhängigkeit vom Input, also aus $K(v_1,v_2)$, sind nach einigen Rechenschritten **K(x)**, also die **Kosten in Abhängigkeit vom Output,** geworden. Nur letzteres ist dabei die eigentliche **Kostenfunktion**!

3.4.1.2 Langfristige Kostenfunktion

Beide Faktoren sind variabel, keiner ist gegeben. Hierdurch entstehen insbes. keine Fixkosten, das Ergebnis ist also

$K(x) = k_v \cdot x$	langfristige Kostenfunktion.

Zunächst die Methode, nach der man vorgeht.

LAMBERT-KOCHREZEPT LANGFRISTIGE KOSTENFUNKTION:

1. Starte mit den Kosten in Abhängigkeit vom Input, also mit $K(v_1,v_2) = q_1 \cdot v_1 + q_2 \cdot v_2$.
2. Nimm dann das Zwischenergebnis der Lagrange-Methode, nämlich $(\partial x/\partial v_1) / (\partial x/\partial v_2) = q_1/q_2$, nachdem also das **Verhältnis der Grenzproduktivitäten gleich dem Faktorpreisverhältnis** ist.
3. Löse auf nach einer der beiden Variablen, also v_1 oder v_2. Man erhält den **Expansionspfad**.
4. Gehe hiermit in das Ergebnis aus Schritt 1. Wir haben dadurch die Kosten in Abhängigkeit von nur noch einem einzigen Inputfaktor.
5. Gehe mit dem Expansionspfad in die Produktionsfunktion $x = x(v_1,v_2)$ und löse nach der verbliebenen Inputvariablen auf. Man erhält die **Faktoreinsatzfunktion** $v_1 = v_1(x)$ oder $v_2 = v_2(x)$.
6. Gehe mit 5. nach 4. Man erhält die Kosten in Abhängigkeit des Outputs x, also K(x). Dies ist die sog. **Kostenfunktion**.

Man erhält insbes. keine Fixkosten. Deswegen handelt es sich um eine langfristige Kostenfunktion, denn langfristig existieren keine Fixkosten.- Gehen wir die Methode an einem Beispiel durch.

Beispiel 23:

Der Unternehmer Fritz habe die Produktionsfunktion $x = v_1^{0,5} \cdot v_2^{0,5}$. Die Faktorpreise liegen bei $q_1 = 10$ € und $q_2 = 5$ €.

Berechne die Kostenfunktion.

Die Kosten in Abhängigkeit des Inputs (also nicht die eigentliche Kostenfunktion!) ist $K(v_1,v_2) = 10 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2$. Die Grenzproduktivität des ersten Faktors ist $\partial x/\partial v_1 = 0{,}5 \cdot v_1^{-0,5} \cdot v_2^{0,5}$, jene für den zweiten liegt bei $\partial x/\partial v_2 = 0{,}5 \cdot v_1^{0,5} \cdot v_2^{-0,5}$. Dividiert man dies, so erhält man

$$(\partial x/\partial v_1) / (\partial x/\partial v_2) = (0{,}5 \cdot v_1^{-0,5} \cdot v_2^{0,5})/(0{,}5 \cdot v_1^{0,5} \cdot v_2^{-0,5})$$

$$= v_2/v_1.$$

Setzt man dies gleich dem Faktorpreisverhältnis, so ist

$$v_2/v_1 = q_1 / q_2 = 10/5 = 2.$$

Auflösen nach dem zweiten Faktor liefert $v_2 = 2 \cdot v_1$. Hiermit geht man in die Kosten (nicht die Kostenfunktion!) und rechnet

$K(v_1,v_2)= 10 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2 = 10 \cdot v_1 + 5 \cdot (2 \cdot v_1) = 20 \cdot v_1$ (#).

LAMBERT-METHODE:

Zwar haben wir die Anzahl der Inputs reduziert, aber immer noch liegen nicht die Kosten in Abhängigkeit von x, also vom Output, vor.

Deshalb geht man mit dem Expansionspfad $v_2 = 2 \cdot v_1$ zusätzlich in die Produktionsfunktion: $x = v_1^{0,5} \cdot v_2^{0,5} = v_1^{0,5} \cdot (20 \cdot v_1)^{0,5} .= 20^{0,5} \cdot v_1$ und löst nach v_1 auf. Man erhält die Faktoreinsatzfunktion $v_1 = 20^{-0,5} \cdot x$. Hiermit geht man schließlich in das Zwischenergebnis (#) und terminiert:

$K(v_1,v_2) = ... = 20 \cdot v_1 = 20 \cdot 20^{-0,5} \cdot x = 20^{0,5} \cdot x$.

Die Kostenfunktion ist also $K(x) = 20^{0,5} \cdot x$.